DOI 10.25588/CSPU.2020.96.20.010
ББК 22.162я73
УДК 517.98(075.8)

Ю. С. Жаркова[1], И. Э. Лапина[2]
[1]ORCID № 0000-0003-0303-118X
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики и методики обучения математике,
Мордовский государственный педагогический институт
имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Российская федерация
E-mail: sss-ulia@mail.ru

[2]ORCID № 0000-0003-1201-8382
Старший преподаватель кафедры математики и методики обучения математике,
Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева,
г. Саранск, Российская федерация
E-mail: irlapina@mail.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ПРОФИЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

Аннотация

Введение. В статье рассматриваются особенности обучения функциональному анализу студентов математических профилей педагогических вузов. Обосновывается необходимость разработки эффективных методов обучения элементам функционального анализа в педагогическом вузе как средств профильной подготовки бакалавров.

Материалы и методы. Основными методами исследования являются анализ научной, учебной и учебно-методической литературы, посвященной проблеме преподавания элементов функционального анализа, а также диагностические методики, включающие наблюдение, описание, беседу, анкетирование, тестирование, методы статистической обработки данных.

Результаты. Рассмотрено содержание курса функционального анализа, выделены типы заданий, необходимые для освоения курса, формирования профессиональных компетенций, развития практических навыков в контексте будущей профессиональной деятельности. Результатом исследования является эффективная организация процесса обучения, подготовки бакалавров к профессиональной деятельности педагога.

Обсуждение. Рассмотрено содержание курса функционального анализа, приведены основные типы задач функционального анализа, рассматриваемых в педагогическом вузе.

Заключение. Делается вывод о том, что изучение функционального анализа бакалаврами педагогического направления (математических профилей) способствует формированию профессиональных компетенций.

Ключевые слова: педагогический вуз; преподавание; бакалавры; функциональный анализ; результаты обучения.

Основные положения:

– определена роль изучения функционального анализа студентами педагогических вузов;

– выделены особенности преподавания элементов функционального анализа в педагогическом вузе;

– представлены типы заданий, предлагаемых в курсе функционального анализа.

1 Введение (Introduction)

Функциональный анализ является обобщением методов линейной алгебры и математического анализа, с одной стороны, с другой — самостоятельным разделом высшей математики, в котором изучаются бесконечномерные пространства и их отображения. Основные разделы классического функционального анализа — это теория меры и интеграла, теория функций, теория операторов, дифференциальное исчисление на бесконечномерных пространствах. Отдельные разделы функционального анализа включают в себя сведения о числовых множествах, свойствах функций.

Однако в силу высокой абстрактности методов функционального анализа их изучение связано с определенными трудностями, такими, как недостаточная подготовленность в области методов математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, а также недостаточность практической направленности дисциплины [1].

Приоритеты в преподавании основных математических курсов в педагогических вузах должны быть расставлены с учетом специфики подготовки бакалавров профиля «Математика. Информатика», формирования профессиональных компетенций, развития практических навыков в контексте будущей профессиональной деятельности [2].

2 Материалы и методы (Materials and methods)

В ходе изучения научной, учебной и учебно-методической литературы выяснилось, что методы функционального анализа отличаются высокой абстрактностью, оторванностью от практического приложения. Функциональный анализ изучается как в технических, так и в педагогических вузах, однако проблема содержания дисциплины в педагогическом вузе заключается в изучении методов функционального анализа с точки зрения будущих учителей математики, направленностью на развитие исследовательских компетенций [3; 4].

3 Результаты (Results)

Исходя из опыта преподавательской деятельности, при анализе содержания дисциплины нами выделены следующие разделы, необходимые для изучения в педагогическом вузе: «Открытые и замк-нутые множества», «Метрические пространства», «Непрерывные отображения», «Линейные нормированные пространства», «Гильбертовы пространства», «Линейные операторы и функционалы», «Интегралы Стилтьеса и Лебега».

Соответственно приведенным разделам были выделены следующие типы заданий:

1) установление взаимно-однозначных соответствий между множествами;

2) проверка аксиом метрики;

3) вычисление расстояния между элементами в метрическом пространстве;

4) вычисление пределов в метрических пространствах;

5) проверка аксиом нормы;

6) проверка сходимости последовательности по норме;

7) проверка аксиом скалярного произведения;

8) вычисление угла между векторами;

9) построение ортонормированной системы элементов;

10) вычисление нормы линейных функционалов и операторов;

11) вычисление интегралов Лебега и Стилтьеса.

Приведенные типы заданий иллюстрируют практическую значимость функционального анализа, как в качестве развития навыков решения задач, сочетающих в себе методы смежных математических дисциплин, так и в качестве повышения профессиональной компетентности [5].

Рассмотрим подробнее задачи приведенных выше типов.

Числовые множества

Приведем примеры заданий, иллюстрирующие развитие владения методами теории множеств:

1) установить взаимно-однозначное соответствие между множествами и определить их мощность между интервалом (a, b) и отрезком [0,1].

2) изобразить графически результат объединения множеств:

$A = \{(x, y) \in R^2 : y \leq -x\}$ и $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3) если S — множество целых положительных чисел, то каково дополнение множества $A = \{1,3,5, \dots\}$?

4) найти пересечение множеств: A= {1, 2, 5} и B = {6, 7, 8}.

5) проверить равенство: (A\C)\B=(A\C)∪(B\C).

6) решить систему отношений:

$$\begin{cases} B \cap X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C. \end{cases}$$

7) изобразить графически пересечение множеств решений неравенств: $x^2 - 6x + 8 \geq 0, x^2 - 4x + 3 \leq 0.$

8) пусть A = {1,3,5}. Образовать все возможные подмножества этого множества.

9) изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества:

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

10) найдите образ X для отображения:

$f\colon \mathrm{x} \to \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 5$, где $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{R}$.

11) постройте обратные отображения для следующих отображений:

а) $\mathrm{x} \to \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 3, \mathrm{X} = [2; +\infty), \mathrm{Y} = \mathrm{R}$;

б) $\mathrm{x} \to \mathrm{x}^4 - 4\mathrm{x}^2 + 3, \mathrm{X} = [\sqrt{3}; +\infty), \mathrm{Y} = \mathrm{R}$.

12) найти предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5}.$$

13) найти предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n\sqrt{n} - 2}{5n^2 - 7\sqrt[3]{n} + 1}.$$

14) доказать, что: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

15) написать формулу общего члена последовательностей:

$$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\dots\right\} \text{ и } \left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\frac{4}{5},-\frac{5}{6},\dots\right\}.$$

16) Используя определение предела, показать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, если:

а) $x_n = \frac{n+1}{n}; a = 1;$

б) $x_n = q^n;\ |q| < 1; a = 0;$

в) $x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}; a = 0.$

В педагогическом вузе студентам можно предложить подобные задачи, требующие уже наличия умений устанавливать биекции, определять мощность множества, строить графики функций.

17) установить взаимно-однозначное соответствие между множествами: [0; 1] и [a, b] [13].

18) установить взаимно-однозначное соответствие между множествами [0; 1] и (0; 1).

19) установить взаимно-однозначное соответствие между множествами (a; b) и (c; d).

20) определить, является ли счетным множество целочисленных узлов на плоскости.

Нормированные пространства и гильбертовы пространства

Приведем примеры заданий, иллюстрирующих развитие владения методами функционального анализа.

Расширением понятия пространства R^2 являются понятия метрического, нормированного и гильбертова пространств, где, соответственно, вектора могут быть не только заданы более чем тремя действительными координатами, но и иметь комплексные координаты, а также принадлежать к классу непрерывных функций, обладающих различными свойствами. Аналогом модуля вектора в нормированном линейном пространстве будет являться норма элемента. Соответственно, в гильбертовом пространстве задается скалярное произведение векторов, определяются ортогональные элементы, задаются ортонормированные системы функций (ряд Фурье).

Рассмотрим ряд примеров, относящихся к названным темам.

21) можно ли в пространстве $C^1[a,b]$ принять за норму элемента $x(t)$:

A) $\max_{t\epsilon[a,b]}|x(t)|$;

B) $\max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)|$;

C) $|x(b) - x(a)| + \max_{t\epsilon[a,b]}|x'(t)|$.

22) доказать, что в пространстве $C[-1,1]$ данные функционалы являются линейными непрерывными, а также еще найти их нормы:

A) $f(x) = \langle x, f\rangle = 2[x(1) - x(0)]$;

B) $f(x) = \langle x, f\rangle = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$.

23) исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке [0;1] функциональную последовательность:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0; \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right), \\ n\left(\frac{1}{2} - x\right), & x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

24) выяснить, сходится ли последовательность:

$x_n = \left(\underbrace{1,1,\dots 1}_{n}, 0, \dots\right)$ в пространстве l_1.

25) проверить линейность, непрерывность и найти норму функционала: $f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$.

26) проверить линейность, непрерывность и найти норму оператора: $Ax(t) = (t^2 + t)x(t)$, действующего на: $X = Y = C[0,2]$.

Как мы видим, для решения заданий, предлагаемых в вузе и относящихся к данной теме, необходимы полученные школьниками в ходе изучения математического анализа умения вычислять производную и определенный интеграл, находить наибольшее и наименьшее значение функций, пределы последовательностей и пределы функций.

Интеграл

Расширением понятия интеграла Римана, изучаемого в средней школе в курсе алгебры и начал математического анализа, являются понятия интегралов Стилтьеса и Лебега, изучаемого в вузах.

Приведём примеры:

27) вычислить интеграл Стилтьеса:

$$\int_{-3}^{3} f(x)dg(x),\ f(x) = e^x,\ \ g(x) = \begin{cases} 0, x < -3 \\ 2, -3 \leq x < 3. \\ x^3, x \geq 3 \end{cases}$$

28) вычислить интеграл Лебега:

$$\int f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} x, x \in Q \\ e^x, x \in R\backslash Q \end{cases} \text{на множестве } [0; 4].$$

4 Обсуждение (Discussion)

Изучение содержательной линии функционального анализа в МГПИ им. М. Е. Евсевьева проводилось в рамках курса «Элементы функционального анализа», а также дисциплин по выбору.

Рассмотрено содержание курса функционального анализа, приведены основные типы задач функционального анализа, необходимые для овладения содержанием курса, развития профессиональной самостоятельности студентов, являющейся основой формирования профессиональных компетенций.

5 Заключение (Conclusion)

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод о необходимости преподавания функционального анализа в педагогическом вузе не только с точки зрения профессиональной направленности, но и для формирования математической культуры учащихся, развития умений анализировать и абстрагировать.

6 Благодарности (acknowledgmens)

Работа выполнена в рамках Программы внутривузовских грантов ФГБОУ ВО «Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева» по мероприятию 1 «Научно- и учебно-методическое обеспечение образовательного процесса вуза» (тема «Разработка научно- и учебно-методического обеспечения дисциплины «Элементы функционального анализа» направления подготовки «Педагогическое образование».

Библиографический список

1. Фомин В. И. О преподавании элементов функционального анализа в вузовском курсе математики // Вопросы современной науки и практики. 2019. № 3 (73). С. 128–135.

2. Капкаева Л. С. Формирование специальных компетенций у будущих педагогов при обучении математическим дисциплинам // Гуманитарные науки и образование. 2014. № 4 (20). С. 34–38.

3. Журавлева О. Н., Сарванова Ж. А., Дорофеев С. Н. Формирование исследовательских компетенций школьников в обучении математике : коллективная монография «Развитие науки и образования». Гл. ред. Э. Н. Рябинина. Чебоксары. 2018. С. 212–221.

4. Derbedeneva N.N., Kochetova I.V., Ladoshkin M.V. & Taktarov N.G. (2018), "Further education in mathematics for russian school students at pedagogical higher education institutions: Methodological aspects of development", *Astra Salvensis,* vol 6, pp. 981–990. ISSN 2393-4727, ISSN-L 2344-1887. (Scopus).

5. Формирование исследовательских компетенций учащихся на современном уроке математики / С. Н. Дорофеев [и др.] // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 10. С. 181–185.

Yu. S. Zharkova[1], I. E. Lapina[2]

[1]ORCID No. 0000-0003-0303-118X

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics,
Mordovian State Pedagogical Institute, Saransk, Russia.
E-mail: sss-ulia@mail.ru

[2]ORCID No. 0000-0003-1201-8382

Senior lecturer at the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Mordovian State Pedagogical Institute, Saransk, Russia.
Email: irlapina@mail.ru

FUNCTIONAL ANALYSIS IN THE PROFILE PREPARATION OF BACHELORS IN THE PEDAGOGICAL DIRECTION OF MATHEMATICAL PROFILES

Abstcact

Introduction. The article discusses the features of teaching functional analysis of students of mathematical profiles of pedagogical universities. The necessity of developing effective teaching methods for the elements of functional analysis in a pedagogical university as a means of specialized training of bachelors is substantiated.

Materials and methods. During the study of scientific, educational and educational literature, it turned out that the methods of functional analysis are highly abstract, divorced from the practical application. Functional analysis is studied in both technical and pedagogical universities, but the problem of the content of the discipline in a pedagogical university is to study the methods of functional analysis from the point of view of future mathematics teachers.

Results. The content of the course of functional analysis is considered, the types of tasks necessary for mastering the course, the formation of professional competencies, the development of practical skills in the context of future professional activity are highlighted. The result of the study is the effective organization of the learning process, preparing bachelors for the professional activities of the teacher.

Discussion. The content of the course of functional analysis is considered, the main types of problems of functional analysis considered in a pedagogical university are given.

Conclusion. It is concluded that the study of functional analysis by bachelors of the pedagogical direction (mathematical profiles) contributes to the formation of professional competencies.

Keywords: Pedagogical University; teaching; bachelors4 functional analysis; learning outcomes.

Highlights:

The role of studying functional analysis by students of pedagogical universities is determined;

The features of teaching elements of functional analysis in a pedagogical university are highlighted;

The types of tasks offered in the course of functional analysis are presented.

References

1. Fomin V.I. (2019), *O prepodavanii elementov funktsional'nogo analiza v vuzovskom kurse matematiki* [About the teaching of the elements of functional analysis in the university course of mathematics]. *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki*, 3 (73), 128–135. (In Russian).

2. Kapkaeva L.S. (2014), *Formirovaniye spetsial'nykh kompetentsiy u budushchikh pedagogov pri obuchenii matematicheskim distsiplinam*[Formation of special competencies in future teachers in teaching mathematical disciplines]. *Gumanitarnyye nauki i obrazovaniye,* 4 (20), 34–38. (In Russian).

3. Zhuravleva O.N., Sarvanova Zh.A. & Dorofeev S.N. (2018), *Formirovaniye issledovatel'skikh kompetentsiy shkol'nikov v obuchenii matematike* [Formation of research competences of schoolchildren in teaching mathematics]. *Development of science and education*, Cheboksary, pp. 212–221. (In Russian).

4. Derbedeneva N.N., Kochetova I.V., Ladoshkin M.V. & Taktarov N.G. (2018), “Further education in mathematics for russian school students

at pedagogical higher education institutions: Methodological aspects of development”, *Astra Salvensis,* vol 6, pp. 981–990. ISSN 2393-4727, ISSN-L 2344-1887. (Scopus).

5. Dorofeev S.N., Zhuravleva O.N., Rybina T.M. & Sarvanova Zh.A. (2018), *Formirovaniye issledovatel'skikh kompetentsiy uchashchikhsya na sovremennom uroke matematiki* [Formation of students' research competencies in a modern mathematics lesson]. *Sovremennyye naukoyemkiye tekhnologii,* 10, 181–185. (In Russian).