DOI: 10.25588/CSPU.2019.13.68.008
УДК 37
ББК 74

М. М. Исакова[1], Р. Г. Тлупова[2], Ф. А. Эржибова[3], А. С. Ибрагим[4]
[1]ORCID № 0000-0003-1189-9456
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация.
E-mail: isakova2206@mail.ru

[2]ORCID № 0000-0002-6336-1378
Преподаватель математики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация.
E-mail: rgtibra05@mail.ru

[3]ORCID № 0000-0002-3821-1124
Преподаватель математики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация.
E-mail: ershibowa@yandex.ru

[4]ORCID № 0000-0002-5884-4578
Магистрант, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация.
E-mail: asibragim@gmail.com

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ

Аннотация

Введение. Повышение интеллектуального уровня, оттачивание математической подготовки, применение инновационных подходов при решении широкого аспекта практических вопросов — вот спектр приоритетных моментов изучения математики. Практическое решение неравенств нетрадиционными методами создаёт новые возможности формирования интуиции, способствует повышению логики мышления.

Материалы и методы. Значительная часть вопросов программы по математике в колледже посвящена исследованию неравенств. Рассмотрены особенности нестандартных приёмов при исследовании иррациональных неравенств, основанные на применении неравенств Коши и Бернулли. Приведены образцы решений иррациональных неравенств, основанные на использовании классических неравенствах Коши и Бернулли.

Результаты. Обоснованный оптимальный выбор метода решения неравенств во многом помогает развитию логики мышления студента, способствует творческому подходу поиска результата.

Обсуждение. Использование нестандартных путей решения иррациональных уравнений и неравенств на занятиях способствует повышению шкалы успеваемости, улучшает уровень математической логики. Применение классических неравенств Коши и Бернулли при исследовании иррациональных неравенств даст импульс исследовательскому поиску поставленных вопросов перед студентом.

Заключение. Использование классических неравенств Коши и Бернулли при решении иррациональных неравенств и уравнений повысят уровень знаний студента. Им легче будет решить задания повышенной трудности, что повлияет на увеличение баллов на ЕГЭ. Представленный материал окажет ощутимую методическую помощь как преподавателям математики, так и студентам, обучающимся в группах углубленного изучения математики, занимающимся научно-исследовательской деятельностью.

Ключевые слова: математическое образование, математическая компетенция, неравенство, особенность, метод, иррациональное неравенство.

Основные положения:

– представлены основные виды иррациональных неравенств;

– дана характеристика общих методов решения иррациональных неравенств;

– рассмотрены особенности при решении иррациональных неравенств;

– представлены неравенства Коши и Бернулли;

– описано нетрадиционное применение неравенства Коши и Бернулли к решению иррациональных неравенств;

– приведены аналоги неравенств, включённых в задания профильного уровня ЕГЭ.

1 Введение (Introduction)

Рассматриваемый модуль «Иррациональные неравенства» (далее ИН) программы по математике для СПО представляют собой частный случай трудоёмкого раздела «Уравнения и неравенства». Традиционно неравенства и уравнения, имеющие широкое применение во многих разделах математики, в разных прикладных задачах, представляют для студентов наибольшую сложность не только в логике исследования, но и в выборе метода решения. Изучение этого модуля раскрывает широкие возможности по формированию и развитию математической, логической культуры и позволяет применять различные педагогические приемы развития логического мышления. Применению основных правил, теорем, путей многоразовых решений, как показывает опыт, можно научить практически каждого, что подтверждается и введением ЕГЭ (база) [1, с. 4]. Применение полученных теоретических основ прямо пропорционально отражается на практическом закреплении материала [2, с. 107]. Каждому обучающемуся основам математического исследования необходимо уметь выбирать оптимальный путь нахождения решения того или иного поставленного в задании вопроса [3].

Наша повседневная жизнь требует от нас, наряду с общей грамотностью, также элементарной математической грамотности. Изучение математики помогает приобретению и укреплению логических и практических навыков в жизненном пространстве. Творческий подход к решению большинства задач требуется от обучаемого; необходимо развитие способности творческой деятельности или хотя бы способности и умения поиска при заданных условиях оптимального решения. Становление логического мышления начинается в средней школе [4]. Изучение математики ставит задачи постоянного повышения математической эрудиции, использования полученного багажа знаний и навыков, выработки определённого логического мышления и даже в некотором смысле проявления воли к достижению поставленной цели. Студент должен применять вкупе классические методы и инновационные методы [5, с. 82]. Разработка и применение особенностей поиска решений модуля «ИН» на практических занятиях требуют углубленной подготовки более сильных студентов колледжей, как будущих абитуриентов университетов и профильных институтов [6; 7; 8]. В учебных планах базовых дисциплин среднего профессионального образования (СПО) модуль «уравнения – неравенства» представляет собой один из основных модулей [9, с. 81]. Грамотное решение заданий этого модуля является одним из главных критериев единой государственной аттестации [10, с. 204]. Д. Пойа отмечал, что правильное решение задачи является процессом творческим, сравнимым с искусством [11, с. 15]. Студенты, участвующие в работе математических объединений, принимающие участие в олимпиадах различных уровней, стараются расширить спектр своих познаний в выборе пути решения ИН. Применение нетрадиционных методов решения, в частности неравенств Коши и Бернулли, поможет успешной сдаче ЕГЭ [12]. Умение применять при выполнении заданий как классические методы (синтетический и аналитический), так и нестандартные методы поможет студентам в их дальнейшей научно-исследовательской работе [13; 14; 15].

2 Материалы и методы (Materials and methods)

Исследование неравенств является, пожалуй, одним из трудоёмких модулей программного курса математики, не только для студентов колледжей, но и для учеников в школах. При решении уравнений и неравенств необходимы навыки и умения, позволяющие проводить довольно-таки разветвленные логические суждения, требуется творческий подход.

Особую трудность представляют собой ИН. К таковым относят неравенства, в которых, кроме основных операций, выполняется действие извлечения корня [16]. Обучающийся, видя в тексте задания корни любой степени, начинает испытывать страх от неумения или незнания использования свойств радикалов. Возводя в квадрат обе части ИН, не всегда получается, избавиться от квадратных корней, что сопряжено с появлением «лишних» решений.

Подстановка найденных решений в решаемое уравнение всегда исключит «лишние» решения. Исследование и окончательный правильный вердикт требуют не только знаний основных правил, но и владения исследовательскими навыками, умения делать логические выводы [17; 18]. Множества промежутков являются множествами решений ИН и проверка не всегда оправдана. В ходе полного исследования ИН необходимо выдерживать равносильность перехода к следующему неравенству, совокупности неравенств или системе неравенств

Мы исследуем строгие и нестрогие ИН видов:

а) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$; $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$; б) $\sqrt{f(x)} > g(x)$; $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$;

в) $\sqrt{f(x)} < g(x)$; $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$.

В алгебраических неравенствах над неизвестными можно совершать лишь счётное количество операций: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень, извлечение корня.

Если над неизвестными, кроме перечисленных действий, выполняются и другие действия: возведения в рациональную степень, взятие логарифма, синуса и так далее, то такие неравенства относятся к трансцендентным неравенствам.

Особенности поиска множества решений ИН позволяют использовать в ходе исследования классическое неравенство Коши: $A \geq C$, где A — среднее арифметическое, C — среднее геометрическое неотрицательных величин [19, с. 5]. Общий случай допускает переход и к среднему арифметическому, и к среднему геометрическому [20]. Известное неравенство Коши:

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

выполняющееся при неотрицательных значениях:

$$a_1, ..., a_n,$$

будем использовать в записи:

$$a_1 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Рассмотрим ИН (№ *1*, *2*, *3*), решённые традиционным способом.

№ 1. Найдите множество решений неравенств:

$$\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$$

и укажите наименьшее целое из найденного интервала.

Решение. С учётом правила: корни чётных степеней извлекаются лишь из неотрицательных чисел, записываем:

$$x^2-55x+250\geq 0 \Leftrightarrow (x-5)\cdot(x-50)\geq 0.$$

Методом интервалов получаем множество решений:

$$x\in(-\infty;5]\cup[50;+\infty).$$

Кроме того, должно выполниться условие:

$$x-14\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 14 \quad x\in[14;+\infty).$$

Найдя пересечение полученных промежутков:

$x\in(-\infty;5]\cup[50;+\infty)$ и $x\in[14;+\infty)$,

получаем область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$x\in[50;+\infty).$$

Возводим обе части заданного неравенства в квадрат:

$$x^2-55x+250<(x-14)^2 \Rightarrow \begin{cases} x\geq 50, \\ x^2-55x+250<x^2-28x+196. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 50, \\ x>2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x\in[50;+\infty).$$

Нами получено решение исходного неравенства:

$$[50;+\infty).$$

Наименьшим целым значением из промежутка:

$$[50;+\infty)$$

является:

$$x=50.$$

Ответ: 50.

ИН типа:

$$\sqrt[2k]{A(x)}<B(x)$$

эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} A(x)\geq 0, \\ B(x)>0, \\ A(x)<B^{2k}(x). \end{cases}$$

ИН типа:

$$\sqrt[2k]{A(x)}>B(x)$$

эквивалентно совокупности систем

неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} B(x)\ge 0, \\ A(x)>B^{2k}(x). \end{cases}\\ \begin{cases} A(x)\ge 0, \\ B(x)<0. \end{cases}\end{array}\right.$$

№ 2. Найдите множество решений ИН:

$$\sqrt{x^2+6x-40}>x+2,$$

укажите наибольшее целое отрицательное значение из множества решений.

Решение.

ИН: $\sqrt{x^2+6x-40}>x+2$

эквивалентно двум системам неравенств:

$$I.\begin{cases} x+2\ge 0, \\ x^2+6x-40>x^2+4x+4. \end{cases} \quad II.\begin{cases} x^2+6x-40\ge 0, \\ x+2<0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$I.\ \begin{cases} x\ge -2, \\ x>22. \end{cases} \quad II.\ \begin{cases} (x+10)(x-4)\ge 0, \\ x<-2. \end{cases}$$

Решение системы неравенств *I*: $(22;+\infty)$; системы *II*: $(-\infty;-10]$. Объединяя найденные интервалы, получаем решение ИН:

$$(-\infty;-10]\cup(22;+\infty).$$

Наибольшим целым отрицательным значением из множества решений является: $x=-10$.

Ответ: $(-\infty;-10]\cup(22;+\infty)$, -10.

Большую сложность для студентов представляет решение ИН вида:

$$\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}<C(x).$$

Необходимо выполнение условий:

$$A(x)\ge 0,\ \sqrt{A(x)}<C(x);\ B(x)\ge 0,\ \sqrt{B(x)}<C(x).$$

На ОДЗ выполнения этих условий неравенство:

$$\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}<C(x)$$

равносильно, соответственно, неравенствам:

$$A(x)<\left(C(x)-\sqrt{B(x)}\right)^2$$

или: $B(x)<\left(C(x)-\sqrt{A(x)}^{2}\right)$, которые приводятся к названным выше случаям.

№ 3. Найдите множество решений ИН:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}<6,$$

укажите наименьшее целое значение из найденного множества решений.

Решение. Неравенство:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}<6$$

эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ x+7\ge 0, \\ \sqrt{x}<6, \\ \sqrt{x+7}<6, \\ x+7<\left(6-\sqrt{x}\right)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x\ge -7, \\ x<36, \\ x<29, \\ 12\sqrt{x}<29. \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x\ge -7, \\ x<36, \\ x<29, \\ x<5\frac{121}{144}. \end{cases}$$

Пересечение неравенств этих решений определяет решение:

$$0\le x<5\frac{121}{144},\quad x\in\left[0,5\frac{121}{144}\right).$$

Наименьшим целым значением из этого множества решений является: $x=0$.

Ответ: $\left[0;\,5\frac{121}{144}\right)$, 0.

Неравенство Коши:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\Leftrightarrow a_1+\ldots+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

выполняется для неотрицательных значений $a_1,\ldots,a_n$.

Приведём исследование неравенств, базирующихся на неравенствах Коши и Бернулли.

В инженерной практике часто используется метод сравнения алгебраических выражений. Применение неравенства Бернулли:

$$\left|k+\frac{1}{k}\right|\ge 2$$

(модуль суммы взаимно обратных чисел больше, либо равен 2), даст оптимальное решение поставленного вопроса. Проиллюстрируем это на примере.

№ 4. Сравните значение:

$$\left(\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_7 2}\right) \text{ и } 2.$$

Решение. Определение логарифма позволяем оценить значение:

$$\log_2 7 > 2.$$

Используем свойство логарифма:

$$\left(\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_7 2}\right)=\left(\frac{1}{\log_2 7}+\log_2 7\right).$$

Правая часть этого равенства есть сумма двух взаимно обратных чисел. По неравенству Бернулли заключаем, что:

$$\left(\log_7 2+\frac{1}{\log_2 7}\right)>2,$$

то есть:

$$\left(\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_7 2}\right)>2.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_7 2}\right)>2$.

№ 5. Доказать, что:

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}\geq 2\sqrt{2},$$

если: $xy=1$ и $x>y$.

Доказательство. Проделав ряд преобразований в левой части неравенства, получаем:

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}=x-y+\frac{2}{x-y}.$$

Из условия имеем:

$$xy=1,\quad x-y>0.$$

Используем неравенство Коши для значения: $n=2$.

Получили: $$x-y+\frac{2}{x-y}\geq 2\sqrt{(x-y)\cdot\frac{2}{x-y}}=2\sqrt{2}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 6. Проверьте, выполняется ли неравенство:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

Решение. Проделав ряд преобразований в левой части неравенства, получаем:

$$\sqrt[3]{3}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}\right)<2\sqrt[3]{3}.$$

Разделим обе части неравенства на $\sqrt[3]{3}$, получаем:

$$\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2.$$

Используем в левой части неравенство Бернулли:

$$\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<1+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{3}=2.$$

Очевидно выполнение исходного неравенства.

С помощью неравенства Коши решается в целых числах неравенство:

$$x^{2017}+\frac{2018}{\sqrt{x}}\geq 2019.$$

Ответ: 1.

3 Результаты (Results)

Жёстким требованиям времени должны удовлетворять специалисты, имеющие среднее профессиональное образование. Изучение особенностей применения нестандартных методов решений способствует развитию логики мышления. Не зря академик С. П. Капица часто цитировал слова своего деда, академика А. Н. Крылова: «Математика … настолько обширна и разнообразна, что … в полном объёме уму человеческому непостижима, а следовательно, должен быть сделан выбор того, что из математики нужно знать» [21, с. 87].

Особенности применения неравенств Коши и Бернулли позволяют повысить уровень обучения, развить вкус к творчеству. Как видно из проведённых исследований ИН, оптимизация отыскания методов решения поможет обучающимся выйти на ступень профессиональной подготовки к ЕГЭ [22, с. 183]. Традиционные пути решения ИН сопровождаются громоздкими выкладками. Использование неканонического пути поиска результата позволяет получить оптимальный путь нахождения корней; развивает математическую интуицию, прививает вкус к математике.

4 Обсуждение (Discussion)

Навыки применения неравенств Коши и Бернулли к поиску решений заданий профильного уровня ЕГЭ помогут учащимся оттачивать логику мышления. Знание нестандартных способов решения заданий по математике способствует усвоению математических терминов, аксиом и теорем; оттачивает навыки применения теории на практике; развивает общую математическую культуру.

5 Заключение (Conclusion)

Особенности применения неравенств Коши и Бернулли для решения ИН имеют познавательный характер; развивается строгость изложения мысли, укрепляется роль теоретических знаний в практике; повышается прикладной аспект в познавательной деятельности. Студенты СПО должны активнее привлекаться к исследовательской деятельности. Классические методы окутаны громоздкими выкладками; выбор нетрадиционного пути решений неравенств в некоторых случаях оптимален.

Изложенные приёмы по применению неравенств Коши и Бернулли окажут практическую помощь при подготовке к ЕГЭ, работе математических объединений, в кружковой работе со студентами СПО.

Библиографический список

1. Башмаков М. И. Математика : сборник задач профильной направленности. М. : Академия. 2013. – 208 с.

2. Жафяров А. Ж. Методология и технология внедрения компетентного подхода в математическом образовании [Электронный ресурс] // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. 2016. № 3. С. 105–115. URL: http://vestnik.nspu.ru/article/1823 (дата обращения: 25.03.2018). DOI: 10.15293/2226-3365.1603.10

3. Столяр А. А. Педагогика математики : учебное пособие. Минск : Высшая школа. 1986. − 414 с.

4. Филиппова К. А. Развитие логического мышления обучающихся средней школы на уроках математики // Молодой ученый. 2015. № 19. С. 622–624. URL https://moluch.ru/archive/99/22245/ (дата обращения: 24.03.2019).

5. Жафяров А.Ж. Реализация технологии внедрения компетентного подхода в школьном курсе математики [Электронный ресурс] // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. 2017. № 2. С. 71–84. URL: http://vestnik.nspu.ru/article/2363 (дата обращения: 25.03.2018). DOI: 10.15293/2226-3365.1702.05

6. Сканави М. И. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / 6-е издание. М. : Мир и Образование, 2013. − 608 с.

7. Болтянский В. Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М. : Наука, 1974. – 592 с.

8. Василевский А. Б. Обучение решению задач по математике : монография. Минск : Высшая школа, 1988. − 256 с.

9. Башмаков М. И. Математика : учебник / 2-е изд. М. : КноРус, 2017. − 394 с.

10. Батуева К. С., Закирова Н. М. Иррациональные уравнения и неравенства в школьном курсе // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. Вып. 19 (316). С. 204–209.

11. Пойа Д. Как решать задачу : монография. М. : Госучпедгиз, 1959. − 208 с.

12. Ященко И. В., Шестаков С. А. Математика. Профильный уровень : методические указания / ЕГЭ — 2018. М. : МЦНМО, 2018. − 240 с.

13. О синтетическом методе решения задач / М. М. Исакова [и др.] // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. 2018. № 1. С. 108–117. DOI: 10.25588/CSPU.2018.01.11

14. Применение аналитического метода при поиске решения задач / М. М. Исакова [и др.] // Вестник Челябинского государственного педагогичес-кого университета. 2018. № 2. С. 71–78. DOI: 10.25588/CSPU.2018.02.07.

15. Нетрадиционные методы решений иррациональных уравнений / М. М. Исакова [и др.] // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. 2018. № 3. С. 54–62. DOI: 10.25588/CSPU.2018.02.07.

16. Башмаков М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия : задачник / 5-е изд. М. : Академия, 2014. − 416 с.

17. Шабунин М. И. Уравнения: лекции для старшеклассников и абитуриентов. 2005. Вып. 1. М. : Чистые пруды,. − 32 с. (Серия «Математика»).

18. Стойлова Л. П. Математика : учебное пособие для студ. высш. пед. уч. Заведений. М. : Академия, 2004. – 424 с.

19. Калинин С. И. Метод неравенств решения уравнений : учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. М. : Московский лицей, 2013. – 112 с.

20. Жафяров А. Ж. Обучающий задачник. Математика. 10–11 классы. Профильный уровень. М. : Просвещение, 2007. – 208 с.

21. Крылов А. Н. Значение математики для кораблестроения // Мои воспоминания. Ленинград : Судостроение, 1979. С. 87–91.

22. Ерина Т. М. Математика. Профильный уровень : практическое руководство / ЕГЭ — 2018. М. : УчПедГиз, 2018. – 352 с.

M. M. Isakova[1], R. G. Tlupova[2], F. A. Erzhibova[3], A. S. Ibrahim[4]

[1]ORCID No. 0000-0003-1189-9456

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics),

Associate Professor at the Department of Algebra and Differential Equations,

Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia.

E-mail: isakova2206@mail.ru

[2]ORCID No 0000-0002-6336-1378
Lecturer at the Department of Mathematics and Natural Sciences,
Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia.
E-mail: rgtibra05@mail.ru

[3]ORCID No 0000-0002-3821-1124
Lecturer at the Department of Mathematics and Natural Sciences,
Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia.
E-mail: ershibowa@yandex.ru

[4]ORCID No 0000-0002-5884-4578
Master's Degree student, Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
Nalchik, Russia.
E-mail: asibragim@gmail.com

EDUCATIONAL TECHNIQUES FOR DEVELOPING THE LOGICAL THINKING OF STUDENTS

Abstract

Introduction. Improving the intellectual level, honing the mathematical preparation, the use of innovative approaches in solving a broad aspect of practical issues — this is the range of priority points in the study of mathematics. Practical solution of inequalities by non-traditional methods creates new opportunities for the formation of intuition, helps to increase the logic of thinking.

Materials and methods. Much of the college math program is devoted to the study of inequalities. The features of non-standard techniques in the study of irrational inequalities, based on the application of Cauchy and Bernoulli inequalities, are considered. Examples of solutions of irrational inequalities based on the use of the classical Cauchy and Bernoulli inequalities are given.

Results. The justified optimal choice of the method of solving inequalities in many ways helps the development of the student's thinking logic, contributes to the creative approach to finding a result.

Discussion. The use of non-standard ways to solve irrational equations and inequalities in the classroom contributes to an increase in the scale of academic performance, improves the level of mathematical logic. The use of classical Cauchy and Bernoulli inequalities in the study of irrational inequalities will give impetus to the research search of the questions posed to the student.

Conclusion. The use of classical Cauchy and Bernoulli inequalities in solving irrational inequalities and equations will increase the level of student knowledge. It will be easier for them to solve the tasks of increased difficulty, which will have an effect on the improvement of points on the Unified State Exam. The presented material will provide tangible methodological assistance to both teachers of mathematics with in-depth study of it, and students engaged in research activities.

Keywords: mathematical education, mathematical competence, inequality, singularity, method, irrational inequality.

Highlights:

Presents the main types of irrational inequalities;

The characteristic of the general methods of solving irrational inequalities is given;

Considered the features in solving irrational inequalities;

Cauchy and Bernoulli inequalities are presented;

Describes non-traditional application of Cauchy and Bernoulli inequalities to solving irrational inequalities;

The analogues of the inequalities included in the tasks of the Unified State Examination level are given.

References

1. Bashmakov M.I. (2013) *Matematika (Sbornik zadach profil'noy napravlennosti)* [Mathematics (Collection of tasks of profile orientation)]. Moscow, *Akademiya*. 208 p. (In Russian).

2. Zhafyarov A.Zh. (2016) *Metodologiya i tekhnologiya vnedreniya kompetentnogo podhoda v matematicheskom obrazovanii* [Methodology and technology for intro-

ducing a competent approach in mathematical education]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta.* 3, 105–115. Available at: http://vestnik.nspu.ru/article/1823. (Accessed: 25.03.2018). DOI: 10.15293/2226-3365.1603.10 (In Russian).

3. Stolyar A.A. (1986) *Pedagogika matematiki (Uchebnoe posobie*) [Pedagogy of mathematics (Textbook)]. Minsk, *Vysshaya shkola.* 414 p. (In Russian).

4. Filippova K. A. (2015) *Razvitie logicheskogo myshleniya obuchayushchihsya srednej shkoly na urokah matematiki* [Development of logical thinking of high school students in math lessons]. *Molodoj uchenyj.* 19, 622–624. Available at: https://moluch.ru/archive/99/22245. (Accessed: 24.03.2019). (In Russian).

5. Zhafyarov A.Zh. (2017) *Realizatsiya tekhnologii vnedreniya kompetentnogo podhoda v shkol'nom kurse matematiki* [Implementation of a technology for introducing a competent approach in the school course of mathematics]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta.* 2, 71–84. Available at: http://vestnik.nspu.ru/article/2363 (Accessed: 25.03.2018). DOI: 10.15293/2226-3365.1702.05 (In Russian).

6. Skanavi M.I. (2013) *Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchih vo vtuzy* [Collection of tasks in mathematics for those who enter the vetuz]. Moscow, *Mir i Obrazovanie.* 608 p. (In Russian).

7. Boltyanskiy V.G. (1974) *Lektsii i zadachi po elementarnoj matematike* [Lectures and tasks on elementary mathematics]. Moscow, *Nauka.* 592 p. (In Russian).

8. Vasilevsky A.B. (1988) *Obuchenie resheniyu zadach po matematike* [Training in solving tasks in mathematics]. Minsk, *Vyshaya shkola*. 256 p. (In Russian).

9. Bashmakov M.I. (2017) *Matematika (Uchebnik*) [Mathematics (Textbook)]. Moscow, *KnoRus.* 394 p. (In Russian).

10. Batuyeva K.S., Zakirova N.M. (2017) *Irracional'nye uravneniya i neravenstva v shkol'nom kurse* [Irrational equations and inequalities in the school course]. *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona.* Kirov. 19 (316), 204–209. (In Russian).

11. Poya D. (1959) *Kak reshat' zadachu* [How to solve the tasks]. Moscow, *Gosuchpedgiz*. 208 p. (In Russian).

12. Yashchenko I.V. (2018) *YEGE — 2018 Matematika. Profil'nyj uroven'. (Metodicheskie ukazaniya)* [USE — 2018. Mathematics. Profile level (Methodical instructions]. Moscow, *Moskovskiy Tsentr Nepreryvnogo Matematicheskogo Obrazovaniya.* 240 p. (In Russian).

13. Isakova M.M., Tlupova R.G., Kankulova S. Kh., Erzhibova F.A., Ibrahim A.S. (2018) *O sinteticheskom metode resheniya zadach* [On the synthetic method for solving problems]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*. 1, 108−117. DOI: 10.25588/CSPU.2018.01.11 (In Russian).

14. Isakova M.M., Tlupova R.G., Erzhibova F.A., Kankulova S.KH., Ibragim A.S. (2018) *Primenenie analiticheskogo metoda pri poiske resheniya zadach* [The application of the analytical method in the search for solving problems]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta.* 2, 71–78. (In Russian).

15. Isakova M.M, Tlupova R.G., Erzhibova F.A., Ibragim A.S. (2018) *Netraditsionnyye metody resheniy irratsional'nykh uravneniy* [Non-traditional methods of decisions irrational equations]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta.* 3, 52–64. (In Russian).

16. Bashmakov M.I. (2014) *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya (Zadachnik)* [Mathematics: algebra and the beginnings of mathematical analysis, geometry (Taskbook)]. Moscow, *Akademiya.* 416 p. (In Russian).

17. Shabunin M.I. (2005) *Uravneniya: lektcii dlya starsheklassnikov i abiturientov* [Equations: lectures for high school students and applicants]. Moscow, *Chistyye prudy.* 1, 32. *(Seriya "Matematika").* (In Russian).

18. Stoilova L.P. (2004) *Matematika uchebnoe posobie dlya studentov vysshih pedagogicheskih uchebnyh zavedenij* [Mathematics: textbook for students of higher educational institutions]. Moscow, *Akademiya.* 424. (In Russian).

19. Kalinin S.I. (2013) *Metod neravenstv resheniya uravnenij: uchebnoye posobiye po ehlektivnomu kursu dlya klassov fiziko-matematicheskogo profilya* [The method of inequalities in the solution of equations: a tutorial on the elective course for classes of physics and mathematics]. Moscow, *Moskovskij licej.* 112 p. (In Russian).

20. Zhafyarov A.Zh. (2007) *Obuchayushchij zadachnik. Matematika. 10–11 klassy. Profil'nyj uroven'* [Learning task book. Mathematics. 10−11 classes. Profile level]. Moscow, *Prosveshchenie.* 208 p. (In Russian).

21. Krylov A.N. (1979) *Znacheniye matematiki dlya korablestroyeniya* [The value of mathematics for shipbuilding]. *Moi vospominaniya. Leningrad, Sudostroenie.* 87–91. (In Russian).

22. Yerina T.M. (2018) *Matematika. Profil'nyj uroven', prakticheskoye rukovodstvo* [Mathematics. Profile level, practical guidance]. Moscow, *UchPedGiz.* 352 p. (In Russian).